

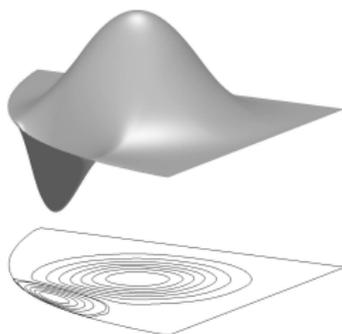
Finite-Elemente-Approximation mit WEB-Splines

Joachim Wipper

Universität Stuttgart

Institut für Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften,
Numerik und geometrische Modellierung (IMNG)

11. Juli 2005



Gliederung

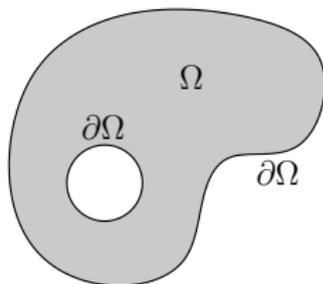
- 1 Finite Elemente
- 2 Splines
- 3 WEB-Splines
- 4 Mehrgitter-Löser
- 5 Anwendungsbeispiele
- 6 Zusammenfassung

Modellproblem

Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ mit glattem Rand.



Schwache Formulierung: $\int_{\Omega} \text{grad} u \cdot \text{grad} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Allgemeines Variationsproblem: $a(u, v) = \lambda(v) \quad \forall v \in H$

Ritz-Galerkin-Ansatz

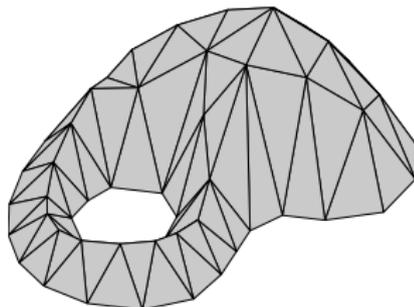
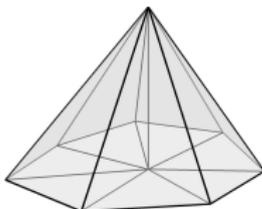
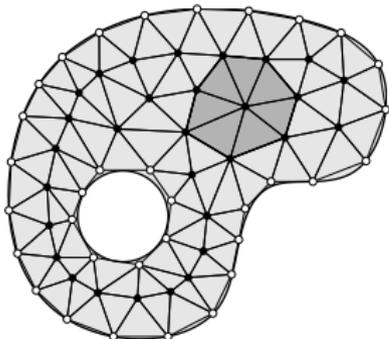
Näherung in $V_h = \text{span}\{b_i : i \in K, |K| < \infty\} \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow u_h = \sum_{i \in K} c_i b_i$

$$a(u_h, b_k) = \lambda(b_k) \quad \forall k \in K$$

$$\sum_{i \in K} \underbrace{\int_{\Omega} \text{grad} b_i \cdot \text{grad} b_k \, dx}_{=: g_{k,i}} c_i = \underbrace{\int_{\Omega} f b_k \, dx}_{=: f_k} \quad \forall k \in K$$

Ergibt lineares Gleichungssystem $GC = F$ zur Koeffizientenbestimmung.

Lineare Elemente:



Standard-Fehlerabschätzungen

Fehler der besten stückweise linearen Approximation in V_h : $\|u - v_h\|_\ell \preceq h^{2-\ell} \|u\|_2$

Lemma (Céa)

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{\alpha_b}{\alpha_e} \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_H$$

Modellproblem: $H = H_0^1(\Omega)$

Lineare Elemente: $\|u - u_h\|_1 \preceq h \|u\|_2$

Lemma (Aubin-Nitsche)

$$\|u - u_h\|_{H^*} \preceq \|u - u_h\|_H \sup_{g \in H^*} \left(\frac{1}{\|g\|_{H^*}} \inf_{v_h \in V_h} \|\varphi_g - v_h\|_H \right),$$

wobei φ_g Lösung von $a(w, \varphi_g) = \langle g, w \rangle_{H^*} \quad \forall w \in H$

Modellproblem: $H^* = L^2(\Omega) \supset H = H_0^1(\Omega)$

Lineare Elemente: $\|u - u_h\|_0 \preceq h^2 \|u\|_2$

Gliederung

- 1 Finite Elemente
- 2 Splines**
- 3 WEB-Splines
- 4 Mehrgitter-Löser
- 5 Anwendungsbeispiele
- 6 Zusammenfassung

B-Splines

Definition

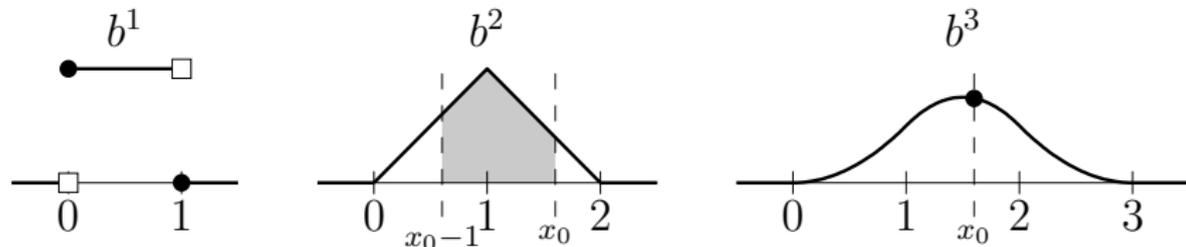
Univariater B-Spline der Ordnung $n \in \mathbb{N}$:

$$b^1(x) := \chi_{[0,1)}(x),$$

$$b^n(x) := \int_0^1 b^{n-1}(x-t) dt \quad \text{für } n > 1$$

Skalierte Translate zur Knotenfolge $h\mathbb{Z}$:

$$b_{k,h}^n(x) := b^n(x/h - k), \quad k \in \mathbb{Z}, h > 0$$



Eigenschaften der B-Splines

- Auf $h(\ell, \ell + 1)$, $\ell \in \mathbb{Z}$, Polynome vom Grad $< n$
- $b_{k,h}^n \geq 0$ mit Träger $\text{supp} b_{k,h}^n = h(k + [0, n])$
- $(n - 2)$ -fach stetig differenzierbar in $h\mathbb{Z} \cap \text{supp} b_{k,h}^n$
- Auf $h(\ell, \ell + 1)$ sind n linear unabhängige B-Splines von Null verschieden
- Differentiation:

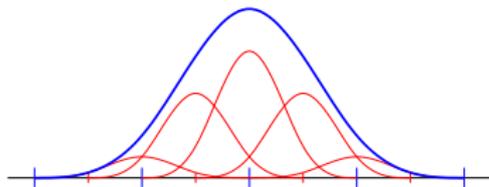
$$\frac{d}{dx} b_{k,h}^n(x) = \frac{1}{h} \left(b_{k,h}^{n-1}(x) - b_{k+1,h}^{n-1}(x) \right)$$

- Rekursionsdarstellung:

$$b_{k,h}^n(x) = \frac{1}{n-1} \left[\left(\frac{x}{h} - k \right) b_{k,h}^{n-1}(x) + \left(n - \frac{x}{h} + k \right) b_{k+1,h}^{n-1}(x) \right]$$

- Subdivisionsdarstellung $h\mathbb{Z} \rightarrow (h/2)\mathbb{Z}$:

$$b_{k,h}^n(x) = 2^{1-n} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} b_{2k+\ell, h/2}^n(x)$$



Spline-Funktionen

Indexmenge relevanter B-Splines zum offenen Intervall I :

$$K_{I,h}^n := \{k \in \mathbb{Z} : \text{supp} b_{k,h}^n \cap I \neq \emptyset\}$$

Spline-Funktion:

$$f(x) := \sum_{k \in K_{I,h}^n} c_k b_{k,h}^n(x)$$

B-Spline-Eigenschaften übertragen sich auf Spline-Funktionen

Theorem (Marsden-Identität)

$$(x - t)^{n-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{k,h}^n(t) b_{k,h}^n(x) \quad \text{mit} \quad \psi_{k,h}^n(t) := \prod_{\ell=1}^{n-1} ((k + \ell)h - t)$$

Darstellung der Monome x^k , $0 \leq k < n$ durch $(n - 1 - k)$ -fache Differentiation nach t und Auswertung bei $t = 0$. Insbesondere gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{k,h}^n(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Approximation mit Spline-Funktionen

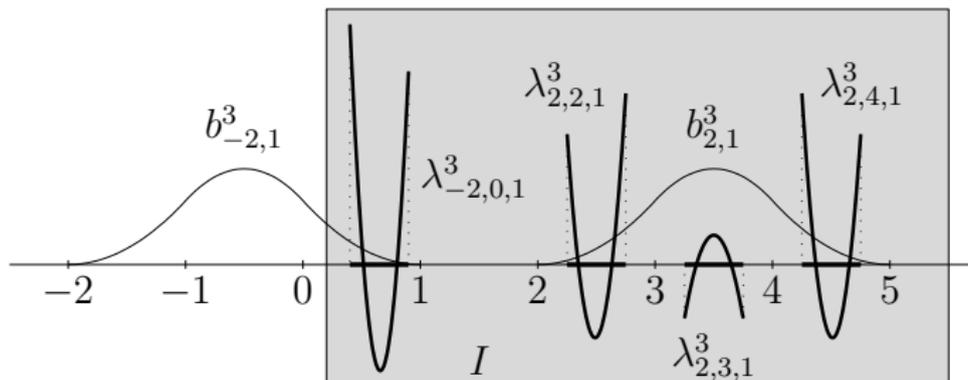
Duale Funktionen $\lambda_{k,\ell,h}^n$:

$$\langle \lambda_{k,\ell,h}^n, b_{j,h}^n \rangle_0 = \delta_{k,j}, \quad \text{supp} \lambda_{k,\ell,h}^n \subset h(\ell, \ell + 1) \subset \text{supp} b_{k,h}^n$$

Standard-Projektion:

$$P_{I,h}^n u := \sum_{k \in K_{I,h}^n} \langle \lambda_{k,\ell,h}^n, u \rangle_0 b_{k,h}^n$$

Optimale Approximationsordnung: $\|u - P_{I,h}^n u\|_\ell \preceq h^{k-\ell} \|u\|_k$

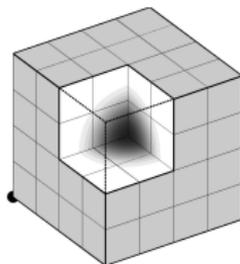
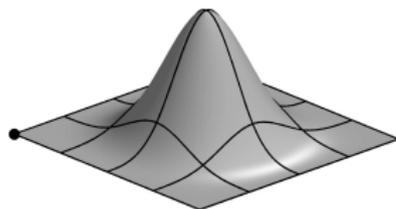
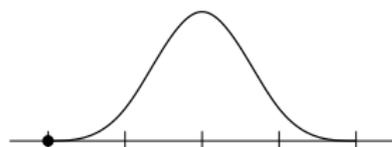


Multivariate Splines

Tensorprodukt-Ansatz zur Bildung m -variater B-Splines und dualer Funktionen:

$$b_{k,h}^n(x) := \prod_{\nu=1}^m b_{k_\nu,h}^{n_\nu}(x_\nu) \quad \text{und} \quad \lambda_{k,\ell,h}^n(x) := \prod_{\nu=1}^m \lambda_{k_\nu,\ell_\nu,h}^{n_\nu}(x_\nu)$$

mit $k, \ell \in \mathbb{Z}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$, $h > 0$



$$\|b_{k,h}^n\|_0 \asymp h^{m/2} \quad \text{und} \quad \|\lambda_{k,\ell,h}^n\|_0 \asymp h^{-m/2} \quad \text{für} \quad \text{supp} \lambda_{k,\ell,h}^n := h(\ell + [1/4, 3/4]^m)$$

$$m\text{-variater Spline-Funktion:} \quad f(x) = \sum_{k \in K_{\Omega,h}^n} c_k b_{k,h}^n(x)$$

Gliederung

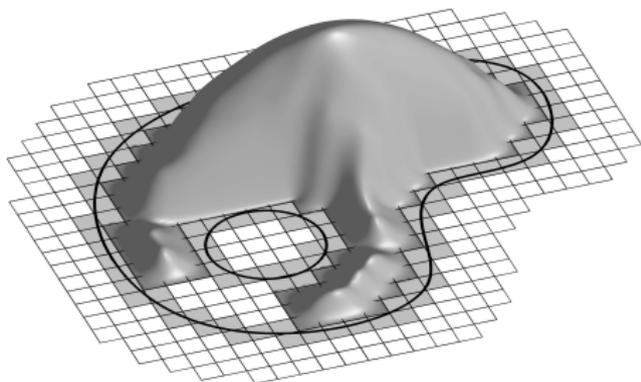
- 1 Finite Elemente
- 2 Splines
- 3 WEB-Splines**
- 4 Mehrgitter-Löser
- 5 Anwendungsbeispiele
- 6 Zusammenfassung

Gewichtung

Verwende $b_{k,h}^n$ zur FE-Approximation

Problem:

**Einhaltung der homogenen
Dirichlet-Randbedingungen**



Lösungsansätze:

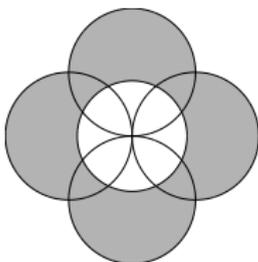
- Babuška 1973: Lagrange-Multiplikatoren, Penalty-Methode
Randwerte werden nur näherungsweise eingehalten
- Kantorowitsch, Krylow 1956: **Gewichtung der Basisfunktionen** $b_{k,h}^n \rightarrow wb_{k,h}^n$

Eigenschaften der Gewichtungsfunktion:

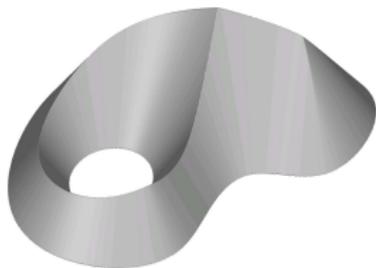
- $w(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und $w(x) > 0$ für $x \in \Omega$
- $w(x) \asymp d(x, \partial\Omega)$
- hinreichend glatt

Konstruktion von Gewichtsfunktionen

- Implizite Darstellung von $\partial\Omega$:
z.B. $w(x) := 1 - x_1^2 - x_2^2$ für $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$
- R -Funktionen: $r_c(w) = -w$, $r_{U/\cap}(w_1, w_2) = w_1 + w_2 \pm \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$



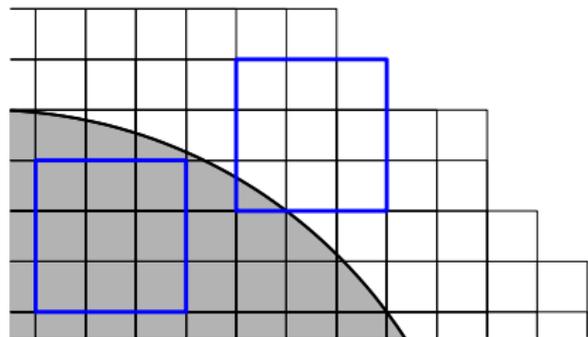
- Geglättete Abstandsfunktion: $w(x) = 1 - \max(0, 1 - d(x, \partial\Omega)/\delta)^\ell$



Nachteil der WB-Splines

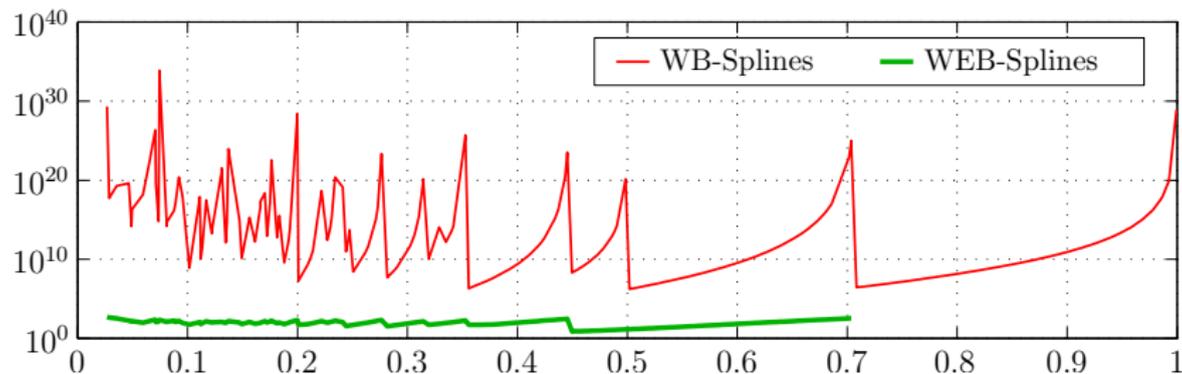
Verwende $wb_{k,h}^n$ zur FE-Approximation

Problem:
Instabilität der Basis



Auswirkung auf Konditionszahl $\text{cond}G$ und damit Konvergenz iterativer Löser.

$\text{cond}G$ für Modellproblem auf dem Einheitskreis:



Klassifikation der B-Splines / Lösungsansatz

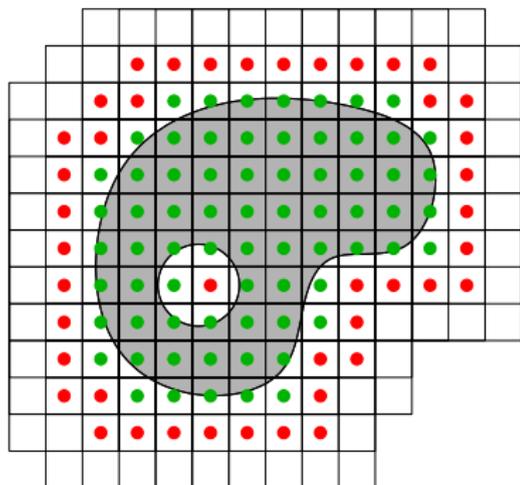
Indexmenge relevanter B-Splines: $K_{\Omega,h}^n$

- **Innere B-Splines:** mindestens eine ganze Gitterzelle in $\text{supp} b_{k,h}^n \cap \Omega$

Indexmenge: $I_{\Omega,h}^n$

- **Äußere B-Splines:** alle anderen relevanten B-Splines

Indexmenge: $J_{\Omega,h}^n := K_{\Omega,h}^n \setminus I_{\Omega,h}^n$



Lösungsansätze:

- Modifikation des Gitters (Translation, andere Weite h)
- Weglassen äußerer B-Splines \rightarrow **Verlust der Approximationskraft**
- **Verknüpfe innere und äußere B-Splines.** Erhalte dabei
 - ▶ Lokalität der Träger
 - ▶ polynomiale Approximationskraft

Erweiterung

Darstellung m -variater Polynome (Marsden-Identität):

$$p(x) = \sum_{k \in K_{\Omega,h}^n} q_h^n(k) b_{k,h}^n(x) = \sum_{i \in I_{\Omega,h}^n} q_h^n(i) b_{i,h}^n(x) + \sum_{j \in J_{\Omega,h}^n} q_h^n(j) b_{j,h}^n(x)$$

- Polynom q_h^n liegt durch Vorgabe von n^m Funktionswerten fest.
- Wähle für $j \in J_{\Omega,h}^n$ nächstgelegenen Würfel von n^m inneren Indizes:

$$I_{\Omega,h}^n(j) := \ell + \{0, \dots, n-1\}^m \subset I_{\Omega,h}^n$$

- Darstellung von $q_h^n(j)$ mit Hilfe von Lagrange-Polynomen $L_{j,i}$:

$$q_h^n(j) = \sum_{i \in I_{\Omega,h}^n(j)} q_h^n(i) L_{j,i}(j)$$

- Duale Indexmengen:

$$J_{\Omega,h}^n(i) := \{j \in J_{\Omega,h}^n : i \in I_{\Omega,h}^n(j)\}$$

Stabilität

Duale Funktionen: Sei Q_ℓ eine innere Zelle von $\text{supp} B_{k,h}^n$, $k \in I_{\Omega,h}^n$ und

$$\Lambda_{k,\ell,h}^n(x) := \frac{w(x_k)h^{m/2}}{w(x)} \lambda_{k,\ell,h}^n(x),$$

wobei $\text{supp} \lambda_{k,\ell,h}^n(x) = h(\ell + [1/4, 3/4]^m) \subset Q_\ell$. Dann gilt

$$\langle \Lambda_{k,\ell,h}^n, B_{i,h}^n \rangle_0 = \delta_{k,i}, \quad \|B_{i,h}^n\|_\ell \preceq h^{-\ell}, \quad \|\Lambda_{k,\ell,h}^n\|_0 \preceq 1.$$

Theorem (Stabilität der WEB-Basis)

$$\|C\| \preceq \left\| \sum_{i \in I_{\Omega,h}^n} c_i B_{i,h}^n(x) \right\|_\ell \preceq h^{-\ell} \|C\| \quad \text{für } 0 \leq \ell \leq n$$

Mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten $r(C) = C^t G C / C^t C$ folgt

$$1 \preceq r(C) \preceq h^{-2} \quad \Rightarrow \quad \text{cond} G = \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)} \preceq h^{-2}.$$

Approximationsordnung

WEB-Standard-Projektion: $P_{\Omega,h}^n u := \sum_{i \in I_{\Omega,h}^n} \langle \Lambda_{i,\ell,h}^n, u \rangle_0 B_{i,h}^n$

Approximation der Funktion $v := u/w$ durch Tensorprodukt-B-Splines.

Theorem (WEB-Approximationsordnung)

Für $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^p(\Omega)$ gilt

$$\|u - P_{\Omega,h}^n u\|_{\ell} \preceq h^{k-\ell} \|u\|_k, \quad 0 \leq \ell < k \leq \min(n, p).$$

Mit Lemmata von Céa / Aubin-Nitsche:

Theorem (Fehler der WEB-Näherungslösung u_h des Modellproblems)

$$\|u - u_h\|_{\ell} \preceq h^{k-\ell} \|u\|_k, \quad \ell \in \{0, 1\}$$

Gliederung

- 1 Finite Elemente
- 2 Splines
- 3 WEB-Splines
- 4 Mehrgitter-Löser**
- 5 Anwendungsbeispiele
- 6 Zusammenfassung

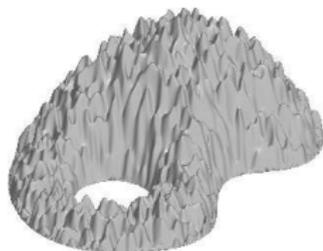
Glättung

Relaxierte Richardson-Iteration

$$V = (E - \omega G)C + \omega F, \quad \omega := \|G\|_{\infty}^{-1},$$

glättet die Residuumsfunktion $r(x) = u(x) - \sum_{i \in I_{\Omega, h}^n} v_i B_{i, h}^n(x)$.

Startfehler



20 Iterationen



40 Iterationen



Jedoch schlechte Konvergenz: 2 639 Variablen, Abbruch nach 41 373 Iterationen mit $\|GV - F\|/\|F\| < 10^{-12}$

Mehrgitteransatz: Residuumsfunktion auf größerem Gitter gut darstellbar

$$R = GV - F = G(V - U_*) =: GW_* \quad \rightarrow \quad \tilde{G}\tilde{W} = \tilde{R} \quad \rightarrow \quad W \approx W_*$$

Gittertransfer

Subdivision von Tensorprodukt-B-Splines:

$$b_{\ell,2h}^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} s_{k-2\ell} b_{k,h}^n \quad \text{mit} \quad s_r := 2^{m(1-n)} \prod_{\nu=1}^m \binom{n}{r_\nu}$$

WB-Splines: $\mathbb{B}_{2h,w}^n(\Omega) \subset \mathbb{B}_{h,w}^n(\Omega)$, WEB-Splines: $\mathbb{B}_{2h,we}^n(\Omega) \not\subset \mathbb{B}_{h,we}^n(\Omega)$

Prolongation mit Standard-Projektion:

$$P_{\Omega,h}^n \tilde{u} = P_{\Omega,h}^n \sum_{\ell \in I_{\Omega,2h}^n} \tilde{c}_\ell B_{\ell,2h}^n = \sum_{i \in I_{\Omega,h}^n} c_i B_{i,h}^n = u$$

Lemma

$$C = P\tilde{C} \quad \text{mit} \quad p_{i,\ell} := \frac{w(x_i)}{w(\tilde{x}_\ell) 2^{m/2}} \left(s_{i-2\ell} + \sum_{j \in J_{\Omega,2h}^n(i)} \tilde{e}_{\ell,j} s_{i-2j} \right)$$

Verwende P^t für Restriktion $\mathbb{B}_{h,we}^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{B}_{2h,we}^n(\Omega)$, da $P^t G P \approx \tilde{G}$.

Statischer Mehrgitteralgorithmus

function $W = M_s(C, F, h)$

$V = S^\alpha(C, F)$

$\tilde{R} = P^t(GV - F)$

if $2h == h_{\max}$

$\tilde{W} = \tilde{G}^{-1}\tilde{R}$

else

$\tilde{W} = M_s^\beta(\tilde{0}, \tilde{R}, 2h)$

end

$W = V - P\tilde{W}$

Steuerparameter:

α : Anzahl Glättungsschritte

β : Anzahl Mehrgitter-Rekursionen

Theorem

Für $\beta = 2$, α hinreichend groß, $C_* = G^{-1}F$ und $W = M_s(C, F, h_{\min})$ gilt

$$\|W - C_*\| \leq \varrho \|C - C_*\| \quad \text{mit } \varrho \in (0, 1).$$

Die Konvergenzrate ϱ ist unabhängig von h .

Gliederung

- 1 Finite Elemente
- 2 Splines
- 3 WEB-Splines
- 4 Mehrgitter-Löser
- 5 Anwendungsbeispiele**
- 6 Zusammenfassung

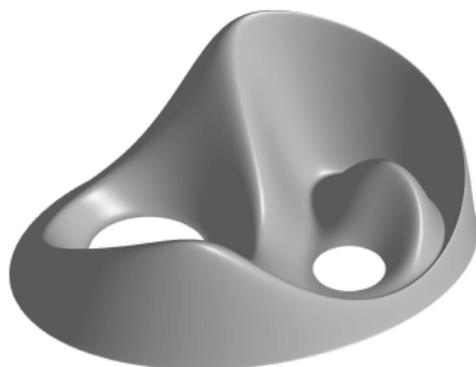
Analytisches Modellproblem

Randwertproblem

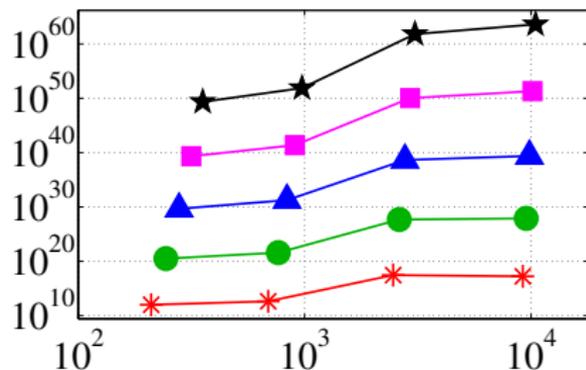
$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit $u = w_{K_1}(1 - \cos(w_{K_2} w_E))$

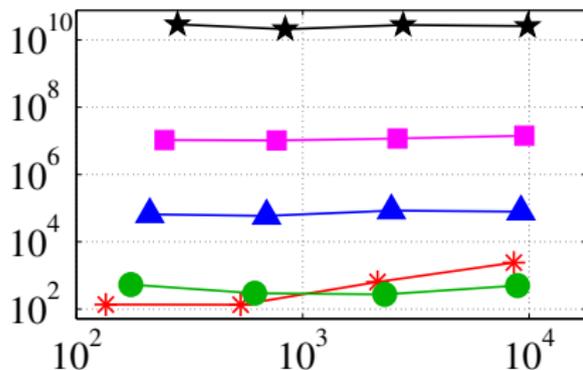
WB-/WEB-Splines mit $w = w_E w_{K_1} w_{K_2}$,
 $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $h = 2^{-i}$, $i \in \{1, \dots, 7\}$



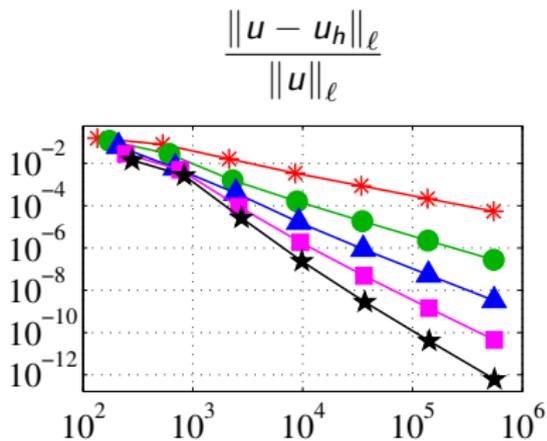
cond G_{WB}



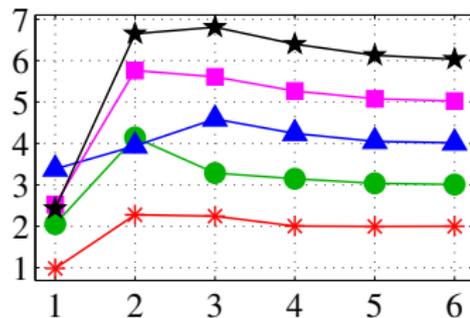
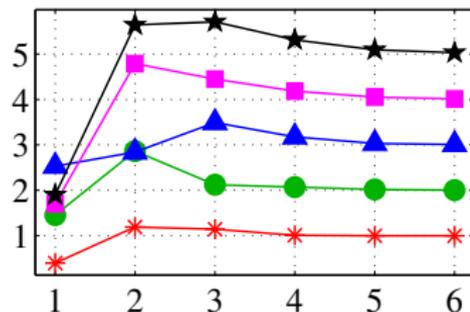
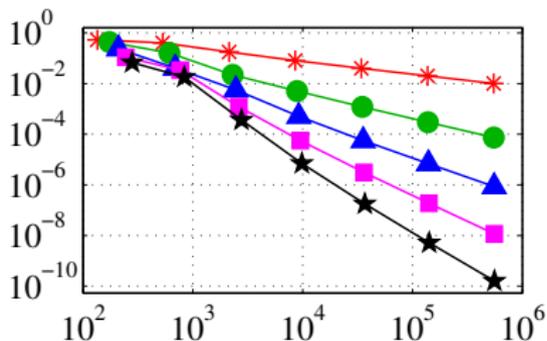
cond G_{WEB}



Fehler und Konvergenzraten

 $\ell = 0$:

$$\log_2 \frac{\|u - u_{2h}\|_\ell}{\|u - u_h\|_\ell}$$

 $\ell = 1$:

Vergleich der Lösungsverfahren

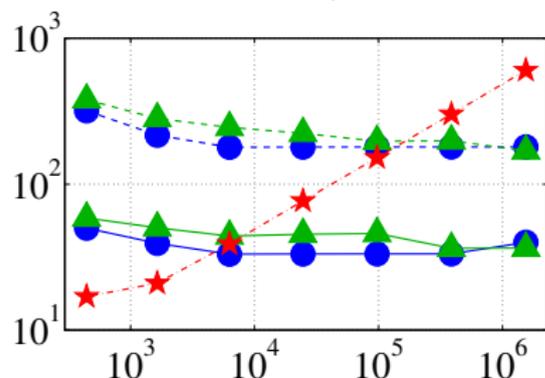
Randwertproblem: $-\Delta u = 1$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$

WEB-Splines mit geglätteter Abstandsfunktion,
 $n = 3$, $h = 1.48 \cdot 2^{-i}$, $i \in \{1, \dots, 7\}$, SSOR-PCG ★

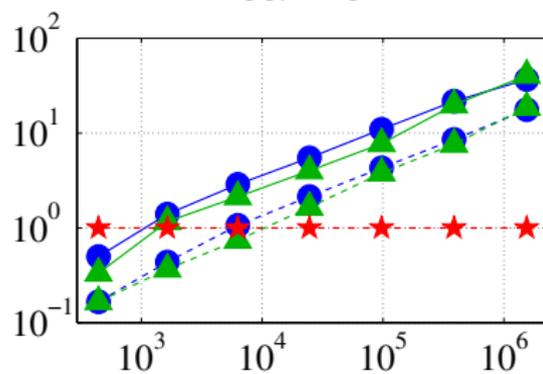


Glätter	α	$\sigma(M)$ für $\beta = 1$ ●	$\sigma(M)$ für $\beta = 2$ ▲
Richardson (- -)	15	0.2532	0.2532
SSOR (—)	5	0.0511	0.0509

Glättungsaufwand/Iterationen



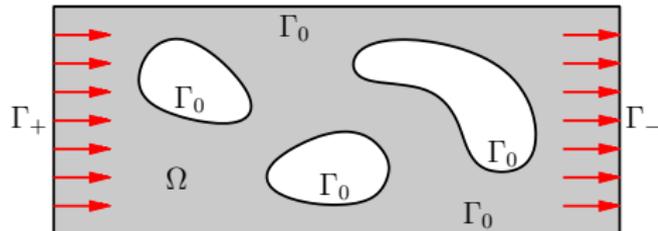
$t_{\text{PCG}}/t_{\text{MG}}$



Potenzialströmung

Randwertproblem:

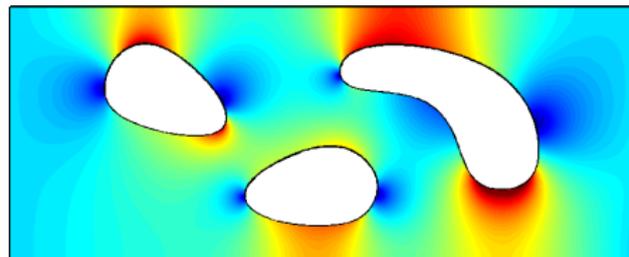
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \pm v_0 && \text{auf } \Gamma_{\pm} \end{aligned}$$



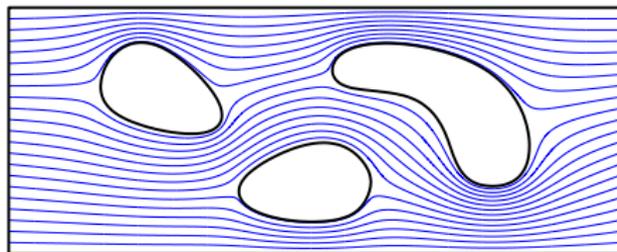
Schwache Formulierung:

$$\int_{\Omega} \text{grad} u \cdot \text{grad} v \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds \quad \forall v \in H_{\perp}^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v \, dx = 0 \right\}$$

Verwende EB-Splines, d.h. $w \equiv 1$



0 1 2 3



Lineare Elastizität

Randwertproblem:

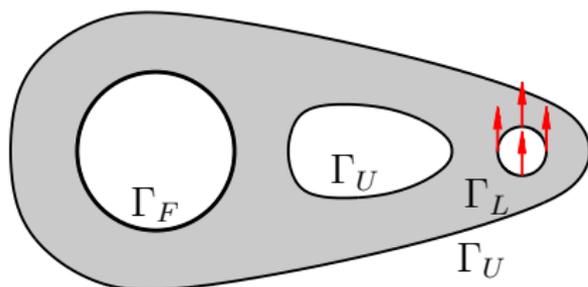
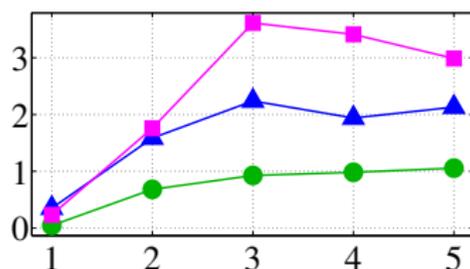
$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_F, \\ \sigma n &= g && \text{auf } \Gamma_L \end{aligned}$$

Schwache Formulierung: $\forall v \in (H_{\Gamma_F}^1(\Omega))^3$

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_L} g \cdot v \, ds$$

Rate des Residuums

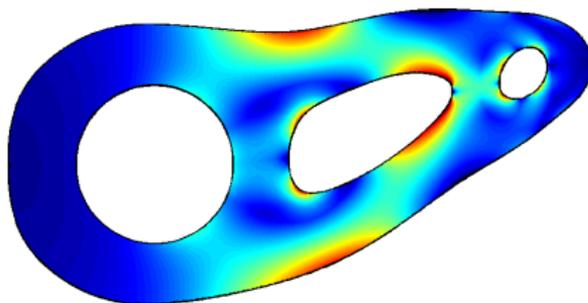
$$\| \operatorname{div} \sigma(u) - 0 \|_0$$



$$h_i = 1.4 \cdot 2^{-i}, \quad i \in \{1, \dots, 6\}$$

$$n \in \{3, 4, 5\}$$

$$w(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4$$



Zusammenfassung

Vorteile des WEB-Verfahrens:

- Keine Vernetzung erforderlich
- Stabilität und optimale Approximationsordnung
- Optimale Konvergenz des Mehrgitter-Lösers
- Vergleichsweise wenige Koeffizienten, glatte Lösungen
- Reguläres Gitter ideal für Subdivision und Parallelisierung

Ausblick:

- Untersuchung singulärer Probleme
- Erschließung weiterer Anwendungsfelder
- Subdivisionsverfahren / Parallelisierung